第８講　数列

1　［1］　3 辺の長さがいずれも 70 より小さい整数で，かつ等差数列になっている三角形は何個あるか．ただし，合同な三角形は区別しないものとする． ［2］　$(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots\cdots\{1+(2n-1)x\}$ を展開したときの x^2 の係数を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　r を 0 でない実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1=r$，$a_n=r+\dfrac{1}{r}a_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ で定める．

（1）　a_n を求めよ．

（2）　$b_1=r$，$b_n=a_n+b_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ の第 n 項を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

|1| ［1］ ３辺の長さがいずれも 70 より小さい整数で，かつ等差数列になっている三角形は何個あるか．ただし，合同な三角形は区別しないものとする．

３辺のうち，最小辺の長さを a（>0）とすると，３辺の長さは a，$a+d$，$a+2d$（$d\geqq 0$）と表すことができる．

これらが三角形の３辺をなすので　$a+2d<a+(a+d)$　　よって　$d<a$　……①

また，題意より　$a+2d<70$ であるから　$a<70-2d$　……②

①，②より　$d<a<70-2d$　a は整数であるから　$d+1\leqq a\leqq 69-2d$

このような a が存在するのは　$d+1\leqq 69-2d$　より　$0\leqq d\leqq 22$ のときである．

この d のそれぞれについて，a は $(69-2d)-(d+1)+1=69-3d$ 個存在する．

よって，求める三角形の個数は

$$\sum_{d=0}^{22}(69-3d)=3\sum_{d=0}^{22}(23-d)=3\cdot\frac{23(23+1)}{2}=\mathbf{828}\ \textbf{(個)}$$

|1| ［2］ $(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots\cdots\{1+(2n-1)x\}$ を展開したときの x^2 の係数を求めよ．

求める x^2 の個数は，1，3，5，……，（$2n-1$）のうち，異なる２数の積の和である．

その和は

$$\frac{1}{2}[\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}^2-\{1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2\}]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n(1+2n-1)}{2}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n^4-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(3n^3-4n^2+1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)}$$

|2| r を 0 でない実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1=r$，$a_n=r+\dfrac{1}{r}a_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ で定める．

（1）　a_n を求めよ．

（2）　$b_1=r$，$b_n=a_n+b_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ の第 n 項を求めよ．

(1)　$a_n=\dfrac{1}{r}a_{n-1}+r$，$a_1=r$

$r=1$ のとき　$a_n=a_{n-1}+1$，$a_1=1$ より　$a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$r\neq 1$ のとき　$a_n-\dfrac{r^2}{r-1}=\dfrac{1}{r}\left(a_{n-1}-\dfrac{r^2}{r-1}\right)$, $a_1-\dfrac{r^2}{r-1}=\dfrac{-r}{r-1}$

$$a_n-\frac{r^2}{r-1}=\left(\frac{-r}{r-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}=-\frac{r^2}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n$$

$$a_n=\frac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$$

以上より　**$r=1$ のとき　$a_n=n$,　　$r\neq 1$ のとき　$a_n=\dfrac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^n\right\}$**

(2)　$b_n-b_{n-1}=a_n$　より　$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$

よって，b_n の階差数列の一般項が a_{n+1} である．

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=r+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}$

$r=1$ のとき　$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+(2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}$　（$n=1$ でも成立）

$r\neq 1$ のとき　$b_n=r+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{k+1}\right\}$

$$=r+\frac{r^2}{r-1}\left[n-1-\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{r}}\right]$$

$$=\frac{r(r-1)}{r-1}+\frac{r^2}{r-1}\left\{n-1-\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{r-1}\left\{r-1+r(n-1)-\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{(r-1)^2}\left\{(r-1)^2+r(n-1)(r-1)-1+\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{(r-1)^2}\left\{-r+nr(r-1)+r\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}=\frac{r^2}{(r-1)^2}\left\{(r-1)n+\left(\frac{1}{r}\right)^n-1\right\}$$

（$n=1$ でも成立）

以上より
$$\begin{cases}\boldsymbol{r=1\text{のとき}\quad b_n=\dfrac{n(n+1)}{2}}\\ \boldsymbol{r\neq 1\text{のとき}\quad b_n=\left(\dfrac{r}{r-1}\right)^2\left\{(r-1)n+\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1\right\}}\end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2 \quad \cdots(※)$$

〔Ⅰ〕 $n=2$ のとき

$$(左辺)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (右辺)=2\sqrt{2}-2=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad より$$

$$\sqrt{2}\{(右辺)-(左辺)\}=(4-2\sqrt{2})-1=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$$

よって，(左辺)<(右辺)より，(※)は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n=k$（$\geqq 2$）のとき　(※)が成り立つとすると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2$$

このとき　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}-2+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

ここで　$2\sqrt{k+1}-2-\left(2\sqrt{k}-2+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left\{2(k+1)-2\sqrt{k(k+1)}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(k+1-2\sqrt{k(k+1)}+k\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0$$

より　$2\sqrt{k}-2+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2$

つまり　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2$　より

$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，2 以上のすべての自然数 n で(※)が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4 を求めよ．

(2)　α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和 $S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$ を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　数列　　練習問題　解答

1 応用 数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$ が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4 を求めよ．

(2) α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの2乗の和 $S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$ を求めよ．

解答例

(1) $a_1=0$ と $a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ により　$a_2=-a_1+\dfrac{1+(-1)^2}{2}=0+1=1$

$$a_3=-a_2+\frac{1+(-1)^3}{2}=-1+0=\mathbf{-1}\qquad a_4=-a_3+\frac{1+(-1)^4}{2}=1+1=\mathbf{2}$$

(2) $b_{n+1}-b_n$ ←― **この計算結果がどうなれば「等差数列」に導けるか…**

$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)-(-1)^n(a_n+\alpha)=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)+(-1)^{n+1}(a_n+\alpha)$$

$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n+2\alpha)$$

$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+2\alpha\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+2\alpha\right)(-1)^{n+1}\quad\left((-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}=\{(-1)\cdot(-1)\}^{n+1}=1^{n+1}=1\text{ より}\right)$$

$\{b_n\}$ が等差数列になるためには，この値が n に関係なく一定になればよい．

よって　$\dfrac{1}{2}+2\alpha=0$　　$\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1}{4}}$

(3) (2)より　$\alpha=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$b_n=(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$　……①　を満たす数列 $\{b_n\}$ は

公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列．

また，$b_1=-\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$　　よって　$b_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{2n-1}{4}$

したがって　$(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2n-1}{4}$

両辺に $(-1)^n$ をかけることにより

$$a_n-\frac{1}{4}=(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{4}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{4}\{1+(-1)^n(2n-1)\}}$

(2)は明らかに(3)のための「誘導」．なぜ突然「等差数列」が出てきたのか疑問をもつかもしれない．しかし，与えられた漸化式を見て，(2)のような変形を行うことで等差数列になることに「気づけば」苦労しないわけで，多くの人が気づかないであろう．だからこそ(2)の誘導がある．それに乗れたかどうかが鍵．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　(3)の結果より，k を自然数として

$$a_{2k-1}=\frac{1}{4}\{-(4k-3)+1\}=-k+1 \qquad a_{2k}=\frac{1}{4}\{(4k-1)+1\}=k$$

よって　$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}({a_{2k-1}}^2+{a_{2k}}^2)=\sum_{k=1}^{n}\{(-k+1)^2+k^2\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n^2+1)}$$

「第 $2n$ 項までの和」の多くがこの「偶数項」と「奇数項」をそれぞれ n 項ずつ加えるという解法に至る．(1)で帰納的に項を導くことによりそれに気づくことは難しいかもしれないが，入試の世界においては典型的解法である．ここは誘導なしで導きたい．Σ の計算が１つですむこともポイント．

2　**発展**　n は２以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\quad\cdots\cdots(※)$$

が成り立つことを示せ．

解答例

［Ⅰ］　$n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0\quad\left(\frac{1}{2}<a_1,\ a_2<1\text{より}\right)$$

よって，$n=2$ のときに（※）は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のときに（※）が成り立つと仮定する．

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

ここで

この置き換えは，いたずらに答案が冗長になるのを防ぐため．

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)=A_k$，$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}=B_k$ とおくと，

この仮定は　$A_k>1-B_k$　と表される．

このとき　$A_{k+1}=A_k\cdot(1-a_{k+1})=A_k-a_{k+1}A_k>1-B_k-a_{k+1}A_k=1-(B_k+a_{k+1}A_k)$

ここで　$B_{k+1}-(B_k+a_{k+1}A_k)$

目的の形を頭に浮かべ，仮定を用いてまず部分的に下げた．

$$=\frac{a_{k+1}}{2^k}-a_{k+1}A_k$$

$$=a_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$\frac{1}{2}<a_l<1$ より　$\frac{1}{2}>1-a_l>0$　$(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k)$，$a_{k+1}>0$ であるから

辺々掛けて①>0 が導かれる．

したがって　$B_k+a_{k+1}A_k<B_{k+1}$　つまり　$1-(B_k+a_{k+1}A_k)>1-B_{k+1}$

よって，$A_{k+1}>1-B_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも（※）は成り立つ．

［Ⅰ］［Ⅱ］より，$n\geqq 2$ のすべての自然数 n で（※）が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。